SOLUSI UTS ANALISIS REAL 1

BAGIAN A :

1. Diberikan barisan bilangan real (x_n) yang monoton naik. Jika barisan (x_n) terbatas ke atas, buktikan bahwa barisan tersebut konvergen

   Solusi.

   Misalkan $x = \sup\{x_n\}$, maka

$$x_n \leq x$$

   Untuk setiap bilangan asli n.

   Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Mengingat definisi supremum, maka untuk $\varepsilon > 0$ terdapat m sehingga

$$x - \varepsilon < x_m \leq x_n$$

   untuk setiap $m \geq n$. Akibatnya,

$$x - \varepsilon < x_m \leq x_n < x + \varepsilon$$

   untuk setiap $m \geq n$. Jadi (x_n) konvergen ke x.

2. Misalkan $\{a_n \mid n = 1,2,3,...\}$ barisan bilangan real, dengan $a_1 = \frac{3}{2}$ dan

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}$$

   untuk $n = 1,2,3,4,....$ Selidiki konvergensi barisan ini.

   Solusi

   Pertama akan dibuktikan : $\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$ untuk setiap n. Dengan induksi matematika

   Untuk $n = 1$ benar, dikarenakan $a_1 = \frac{3}{2} < 2$. Andaikan $\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$ maka

$$2 = \sqrt{3 \times 2 - 2} \geq a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2} \geq \sqrt{3 \times \frac{3}{2} - 2} = \sqrt{2,5} > \frac{3}{2}$$

   Karena $f(x) = 3x - 2$ lebih besar dari satu untuk $\frac{3}{2} \leq x < 2$. Hal ini berarti barisan bilangan (a_n) monoton naik. Dengan menggunakan hasil no 1, maka barisan tersebut konvergen.

SOLUSI UAS MATEMATIKA KEUANGAN 2015-2016

1. Diberikan model pasar yang bebas arbitrage, buktikan bahwa model ini memenuhi hukum satu harga. (30 poin)

   Solusi.

   Pernyataan dibuktikan dengan kontraposisi. Akan dibuktikan bahwa jika model tidak memenuhi hukum satu harga maka terjadi arbitrage.

   Andaikan model tidak memenuhi hukum satu harga. Jadi terdapat vektor portofolio φ sedemikian hingga $\Pi_1^{\varphi} = 0$ dan $\Pi_0^{\varphi} \neq 0$. Karena model tidak memenuhi hukum satu harga, untuk vektor klaim $X > 0$ terdapat vektor portofolio θ yang mereplikasi X, yaitu

$$\Pi_1^{\theta} = X > 0$$

   Bentuk portofolio

$$\mu = \theta - \frac{\Pi_0^{\theta}}{\Pi_0^{\varphi}}\varphi$$

   maka

$$\Pi_1^{\mu} = \Pi_1^{\theta - \frac{\Pi_0^{\theta}}{\Pi_0^{\varphi}}\varphi} = \Pi_1^{\theta} - \frac{\Pi_0^{\theta}}{\Pi_0^{\varphi}}\Pi_1^{\varphi} = \Pi_1^{\theta} = X > 0$$

   dan

$$\Pi_0^{\mu} = \Pi_0^{\theta - \frac{\Pi_0^{\theta}}{\Pi_0^{\varphi}}\varphi} = \Pi_0^{\theta} - \frac{\Pi_0^{\theta}}{\Pi_0^{\varphi}}\Pi_0^{\varphi} = \mathbf{0}$$

   Ini berarti terjadi arbitrage tipe I.•

Diketahui pasar sekuritas dengan 4 aset basis dan 4 state dengan matriks pembayaran sebagai berikut

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Apakah pasar di atas lengkap? Jelaskan. (25 poin)

   Solusi

   Karena $\det(A) = 3 \neq 0$ maka model pasar ini merupakan model pasar lengkap.

3. Jika $S_0 = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ *initial price vector*, apakah terjadi *arbitrage*? Jelaskan. (25 poin)

Solusi.

Tinjau sistem persamaan

$$\varphi\, D = S_0 \text{ atau } \varphi^T = (D^T)^{-1}\, {S_0}^T = \begin{pmatrix} 1{,}15 \\ 2{,}15 \\ 0{,}9 \\ 3{,}9 \end{pmatrix}$$

Hal ini berarti vektor portofolio φ merupakan vektor positif dan

$$\Pi_0^{\varphi} = \left(1{,}15 \times \frac{9}{10} + 2{,}15 \times 1 + 0{,}9 \times \frac{1}{4} + 3{,}9 \times \frac{1}{4}\right) = 4{,}385 > 0$$

Oleh karenanya, model pasar ini terjamin tidak adanya kejadian arbitrage.